7. Алгебра оператора

Централна тема којом се бави теорија апстрактних простора јесте теорија оператора у апстрактним просторима. Као што је уобичајено у овом курсу, почиње се са дефиницијом оператора у унитарном простору $\mathbb{U}$, али за сада не истичући одмах разлику између коначно- и бесконачно-димензионалног случаја.

Дефиниција 7.1. Пресликавање из унитарног простора $\mathbb{U}$ у исти тај унитарни простор $\mathbb{U}$ назива се *оператором*.[1]

Будући да је $\hat{A}$ оператор, $|v_1\rangle \in \mathbb{U}$ објекат пресликавања и $|v_2\rangle \in \mathbb{U}$ лик пресликавања, онда је $\hat{A}|v_1\rangle = |v_2\rangle$.

Ако оператор $\hat{A}$ има особину да линеарну комбинацију објеката пресликавања преводи у исту такву линеарну комбинацију ликова пресликавања

$$\hat{A}\left(\alpha_1|v_1\rangle + \alpha_2|v_2\rangle\right) = \alpha_1\hat{A}|v_1\rangle + \alpha_2\hat{A}|v_2\rangle$$

онда се пресликавање $\hat{A}$ назива *линеарним оператором*, дефинисаним на $\mathbb{U}$.

Скуп свих објеката пресликавања јесте *домен оператора*, $\mathbb{D}(\hat{A})$, док је скуп свих ликова оператора *област ликова* или *домет*, $\mathbb{R}(\hat{A})$, од енглеског *range*.

Синтагма »дефинисан на $\mathbb{U}$« практично значи да ће бити коришћени оператори чији је домен у коначно-димензионалном случају читав простор $\mathbb{U}^n$: $\mathbb{D}(\hat{A}) = \mathbb{U}^n$, док је у бесконачно-димензионалном случају свуда густ у $\mathbb{U}$.

Оператор се може записати и као свако друго пресликавање: $\hat{A}: \mathbb{U} \to \mathbb{U}$. Како ће се у оквиру овог курса најчешће користити управо линеарни оператори, одредница »линеаран« биће понекад изостављана.

[1] Оператори се каткад дефинишу као пресликавања простора $\mathbb{U}$ на неки други простор $\mathbb{V}$ (али оба над истим пољем $\mathbb{F}$). У оквиру овог курса неће бити потребе за овим, сем код третирања функционала као оператора; сем тога, у физици наведена дефиниција сасвим је уобичајена.

Сваки оператор потпуно је одређен ако је познато како делује на векторе одређеног базиса $\{|\mathrm{e}_i\rangle\}$ из $\mathbb{U}$. Заиста, деловањем линеарног оператора $\hat{A}$ на Фуријеов развој вектора $|v\rangle = \sum_i \xi_i |\mathrm{e}_i\rangle$, добија се вектор

$$\hat{A}|v\rangle = \hat{A}\left(\sum_i \xi_i |\mathrm{e}_i\rangle\right) = \sum_i \xi_i \hat{A}|\mathrm{e}_i\rangle$$

наравно, управо због линеарности оператора $\hat{A}$. Ово значи да је лик $\hat{A}|v\rangle$ једнозначно одређен за сваки вектор $|v\rangle \in \mathbb{U}$, чиме је и оператор $\hat{A}$ потпуно одређен.

Два оператора $\hat{A}: \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ и $\hat{B}: \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ *једнаки* су ако је

$$\hat{A}|v\rangle = \hat{B}|v\rangle, \ \forall |v\rangle \in \mathbb{D}(\hat{A}) \cap \mathbb{D}(\hat{B}).$$ [2]

Често се пише и операторска једнакост $\hat{A} = \hat{B}$.

Збир $\hat{C} = \hat{A} + \hat{B}$ два оператора $\hat{A}: \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ и $\hat{B}: \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ дефинише се као

$$\hat{C} = (\hat{A} + \hat{B})|v\rangle = \hat{A}|v\rangle + \hat{B}|v\rangle, \ \ \forall |v\rangle \in \mathbb{D}(\hat{A}) \cap \mathbb{D}(\hat{B}).$$

Очигледно је да је реч о линеарном оператору $\hat{C}: \mathbb{U} \to \mathbb{U}$.

Производ $\hat{D} = \alpha \hat{A}$ оператора $\hat{A}$ са скаларом $\alpha \in \mathbb{F}$, дефинише се као

$$\hat{D}|v\rangle = \alpha \hat{A}|v\rangle, \ \ \forall |v\rangle \in \mathbb{D}(\hat{A}).$$

$\hat{D}$ је такође линеарни оператор.

На основу горе дефинисаних операција са операторима јасно је да је над скупом $\mathbb{L}(\mathbb{U}, \mathbb{U})$ свих оператора (дефинисаних на $\mathbb{U}$ са ликовима из $\mathbb{U}$), формирана структура векторског простора. Ако би оператори били дефинисани као у фусноти 24, скуп свих оператора био би означен са $\mathbb{L}(\mathbb{U}, \mathbb{V})$.

[2] Од сада се неће посебно наглашавати да је за коначно-димензионални случај $\mathbb{D}(\hat{A}) = \mathbb{U}$, сем када то заиста није очигледно.

Будући да су елементи скупа $\mathbb{L}(\mathbb{U},\mathbb{U})$ оператори, може се увести и бинарна операција међусобног *множења* тих елемената, схваћена као узастопна примена оператора.

Ако су $\hat{A},\hat{B}\in\mathbb{L}(\mathbb{U},\mathbb{U})$ онда постоји $\hat{G}=\hat{A}\hat{B}$ такво да је

$$\hat{G}|v\rangle=(\hat{A}\hat{B})|v\rangle=\hat{A}\left(\hat{B}|v\rangle\right)=\hat{A}|\tilde{v}\rangle=|\underline{v}\rangle,\quad \forall|v\rangle\in\mathbb{D}(\hat{B}),\ \forall\hat{B}|v\rangle\in\mathbb{D}(\hat{A}).$$

Или $|v\rangle\in\mathbb{U}$ у КДУП. $\hat{G}$ је линеаран оператор.

Множење оператора је

1. *асоцијативно*

$$(\hat{A}\hat{B})\hat{C}=\hat{A}(\hat{B}\hat{C})=\hat{A}\hat{B}\hat{C}\,;$$

2. *дистрибутивн*о (у односу на сабирање оператора)

$$\begin{matrix}(\hat{A}+\hat{B})\hat{C}=\hat{A}\hat{C}+\hat{B}\hat{C}\\ \hat{A}(\hat{B}+\hat{C})=\hat{A}\hat{B}+\hat{A}\hat{C}\end{matrix}\,;$$

3. *асоцијативно* (у односу на множење оператора скаларом)

$$\alpha(\hat{A}\hat{B})=(\alpha\hat{A})\hat{B}=\hat{A}(\alpha\hat{B})\,.$$

У простору $\mathbb{L}(\mathbb{U},\mathbb{U})$ постоји *јединични оператор* $\hat{I}$

$$\hat{I}|v\rangle=|v\rangle,\quad \forall|v\rangle\in\mathbb{U}$$

те је

$$\hat{I}\hat{A}=\hat{A}\hat{I}=\hat{A}.$$

Међутим, за операторе у општем случају не важи *комутативност*

$$\hat{A}\hat{B}\neq\hat{B}\hat{A}\,.$$

Без обзира на то, $\mathbb{L}(\mathbb{U},\mathbb{U})$ јесте *алгебра са јединицом* (видети **дефиницију 2.4**) премда некомутативна.

Због некомутативности оператора из $\mathbb{L}(\mathbb{U},\mathbb{U})$ дефинише се и један специјалан вид производа.

Дефиниција 7.2. *Комутатор* $\left[\hat{A},\hat{B}\right]$ оператора $\hat{A},\hat{B}\in\mathbb{L}(\mathbb{U},\mathbb{U})$ дефинише се као се разлика између производа првог оператора са другим и производа другог оператора са првим

$$\left[\hat{A},\hat{B}\right]=\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}.$$

Пошто множење оператора није у општем случају комутативно, комутатор $\left[\hat{A},\hat{B}\right]$ врло често је различит од нуле. Последица ове чињенице јесу многе физичке особине и појаве у системима који се описују математичком структуром којој у основи лежи некомутативна алгебра, пре свега квантни системи. Нпр. једна од поменутих појава јесу чувене Хајзенбергове релације неодређености.

Сада ће бити наведени примери оператора у случају коначно-димензионалних унитарних простора.

Пример 7.2.1. Нулти оператор у простору $\mathbb{U}^n(\mathbb{F})$

$$\hat{0}\left|v\right\rangle=\left|0\right\rangle,\quad \forall\left|v\right\rangle\in\mathbb{U}^n(\mathbb{F})$$

Нулти оператор је очигледно линеаран оператор.

Пример 7.2.2. Јединични оператор у простору $\mathbb{U}^n(\mathbb{F})$

$$\hat{I}\left|v\right\rangle=\left|v\right\rangle,\quad \forall\left|v\right\rangle\in\mathbb{U}^n(\mathbb{F})$$

Јединични оператор такође је линеаран оператор.

Пример 7.2.3. Простор $\mathbb{R}^3$ *ротација* вектора око дате осе која пролази кроз координатни почетак. Одговарајући оператор $\hat{R}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ пресликава сваки вектор $\left|v\right\rangle$ у лик $\hat{R}\left|v\right\rangle$ у који вектор $\left|v\right\rangle$ прелази ротацијом.

Пример 7.2.4. Простор $\mathbb{F}^{n1}$, са операцијом којом се сваком вектору $|v\rangle$ (представљеном матрицом-колоном v) придружује њен производ са оператором $\hat{A}$ слева (представљеним квадратном $n\times n$ матрицом $\mathscr{A}$): $\tilde{v}=\mathscr{A}v$. При томе је $\tilde{v}$ такође матрица-колона. Дакле, матрице типа $n\times n$ су линеарни оператори у простору $\mathbb{F}^{n1}$.

Јасно је да скуп $\mathbb{F}^{n1}$ свих матрица поменутог типа, чији су матрични елементи из поља $\mathbb{F}$, образује једну алгебру са јединицом, у којој је бинарна операција множења дефинисана као матрично множење, док је њен јединични елемент управо јединична матрица. Стога је $\mathbb{F}^{nn}=\mathbb{L}(\mathbb{F}^{n},\ {}^{n})$, односно квадратним матрицама $n\times n$ представљају се оператори који делују у простору матрица-колона $\mathbb{F}^{n1}$.

Дефиниција 7.3. Две алгебре $\mathbb{A}_1$ и $\mathbb{A}_2$ над истим пољем $\mathbb{F}$ су *изоморфне* ако постоји бијекција h са $\mathbb{A}_1$ на $\mathbb{A}_2$ таква да је

$$\left.\begin{aligned} h\big(\alpha_1|v_1\rangle+\alpha_2|v_2\rangle\big)&=\alpha_1 h\big(|v_1\rangle\big)+\alpha_2 h\big(|v_2\rangle\big)\\ h\big(\langle v_1|v_2\rangle\big)&=h\big(|v_1\rangle\big)\,h\big(|v_2\rangle\big)\end{aligned}\right.,\quad \forall|v_1\rangle,|v_2\rangle\in\mathbb{A}_1$$

односно ако бијекција h чува *структуру*.

Као што знамо, оператор $\hat{A}\in\mathbb{L}(\mathbb{U},\mathbb{U})$ потпуно је задат ако су познати ликови $\left\{\hat{A}|v_i\rangle\right\}$ неког изабраног базиса $\{|v_i\rangle\}$. Њих сада можемо развити по истом базису пошто се ради о операторима $\hat{A}\in\mathbb{L}(\mathbb{U},\mathbb{U})$; ако би се радило оператору из $\mathbb{L}(\mathbb{U},\mathbb{V})$ онда би се развој вршио по базису из простора $\mathbb{V}$

$$\hat{A}|v_i\rangle=\sum_{j=1}^{n}\tilde{a}_{ij}\,|v_j\rangle,\quad i=\overline{1,n}.$$

Матрица $\tilde{\mathscr{A}}=[\tilde{a}_{ij}]$ природно се појавила, али се (биће објашњено касније) оператору $\hat{A}$ придружује транспонована матрица $\mathscr{A}=(\tilde{\mathscr{A}})^{\mathrm{T}}=[a_{ji}]$, па је

$$\hat{A}\left|v_i\right\rangle = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\left|v_j\right\rangle, \quad i = \overline{1,n}. \tag{7.1}$$

Формула (7.1) назива се *основна формула репрезентовања*, у којој је оператор $\hat{A} \in \mathbb{L}(\mathbb{U},\mathbb{U})$ док је матрица $\mathscr{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{F}^{nn} = \mathbb{L}(\mathbb{F}^n, \ {}^n)$; њоме је успостављена *бијекција* $h(\hat{A}) = \mathscr{A}$ између алгебре $\mathbb{L}(\mathbb{U},\mathbb{U})$ и алгебре $\mathbb{F}^{nn} = \mathbb{L}(\mathbb{F}^n, \ {}^n)$.

Лема 7.1. Бијекција g је изоморфизам између алгебри $\mathbb{L}(\mathbb{U},\mathbb{U})$ и $\mathbb{F}^{nn}$, који се назива *репрезентовање оператора матрицама*.

Доказ.

Заиста, g чува структуру поменутих алгебри

i) Из $\begin{matrix} g(\hat{A}) = \mathscr{A} = [a_{ij}] \\ g(\hat{B}) = \mathscr{B} = [b_{ij}] \end{matrix}$ следи да је $g(\hat{A}+\hat{B}) = \mathscr{A} + \mathscr{B}$;

ii) Из $\begin{matrix} \alpha \in \mathbb{F} \\ g(\hat{A}) = \mathscr{A} = [a_{ij}] \end{matrix}$ следи да је $g(\alpha\hat{A}) = \alpha\mathscr{A}$;

iii) Из $\begin{matrix} g(\hat{A}) = \mathscr{A} = [a_{ij}] \\ g(\hat{B}) = \mathscr{B} = [b_{ij}] \end{matrix}$ следи да је $g(\hat{A}\,\hat{B}) = \mathscr{A}\mathscr{B}$.

Биће проверен трећи израз будући да је нешто сложенији од прва два.

$$\begin{aligned}(\hat{A}\hat{B})\left|v_i\right\rangle &= \hat{A}\left(\hat{B}\left|v_i\right\rangle\right) = \hat{A}\left(\sum_{j=1}^{n} b_{ji}\left|v_j\right\rangle\right) = \sum_{j=1}^{n} b_{ji}\hat{A}\left|v_j\right\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{n} b_{ji}\sum_{k=1}^{n} a_{kj}\left|v_k\right\rangle = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{kj}b_{ji}\right)\left|v_k\right\rangle = \sum_{k=1}^{n}[\mathscr{A}\mathscr{B}]_{ki}\left|v_k\right\rangle\end{aligned}$$

односно

$$g(\hat{A}\,\hat{B}) = \mathscr{A}\mathscr{B},$$

чиме је показано да бијекција g стварно чува структуру.

Q.E.D.

На основу последњег аргумента у претпоследњем изразу види се зашто се сваком оператору придружује матрица транспонована оној која се добија развијањем ликова датог базиса по истом том базису: да би се очувала структура, односно *поредак при матричном множењу*.

Теорема 7.1. Оператор $\hat{A}$ и матрица $\mathscr{A} = g(\hat{A})$ еквивалентни су у односу на изоморфизам f из **теореме 1.3.**

$$\mathscr{A} = f\,\hat{A}\,f^{-1},$$

тј. изоморфизам f индукује изоморфизам алгебри оператора $\hat{A}$ преко *трансформације сличности*

$$g(\hat{A}) = f\,\hat{A}\,f^{-1}.$$

Доказ.

Према **леми 7.1.** g јесте изоморфизам, а на основу **теореме 1.3.** такође је и f изоморфизам. Стога се полази од произвољног вектора $|v\rangle \in \mathbb{U}^n$ таквог да важи $|\tilde{v}\rangle = \hat{A}|v\rangle$. Фуријеови развоји оба вектора по датом базису дати су изразима

$$|v\rangle = \sum_{i=1}^{n} \xi_i |v_i\rangle \quad \text{и} \quad |\tilde{v}\rangle = \sum_{i=1}^{n} \eta_i |v_i\rangle,$$

чиме се добијају матрице-колоне

$$\xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \eta = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix},$$

односно, према **теореми 1.2.**

$$f\left(|v\rangle\right) = \xi \quad \text{и} \quad f\left(|\tilde{v}\rangle\right) = \eta.$$

С друге стране је

$$\left|\tilde{v}\right\rangle = \hat{A}\left|v\right\rangle = \hat{A}\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i\left|v_i\right\rangle\right) = \sum_{i=1}^{n}\xi_i\hat{A}\left|v_i\right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\xi_i\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ji}\left|v_j\right\rangle\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ji}\xi_i\right)\left|v_j\right\rangle.$$

Како је Фуријеов развој вектора $\left|\tilde{v}\right\rangle$ јединствен

$$\left|\tilde{v}\right\rangle = \sum_{j=1}^{n}\eta_j\left|v_j\right\rangle$$

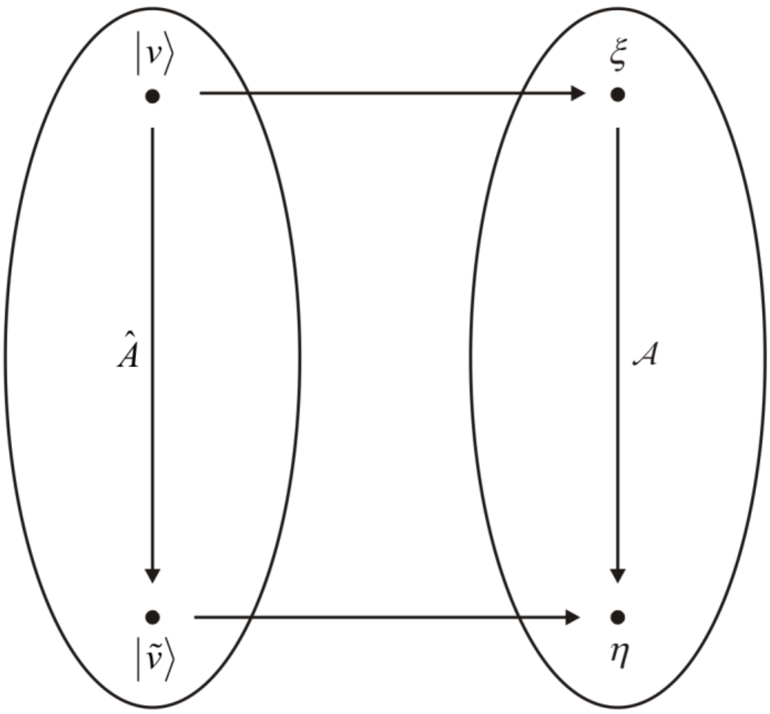
упоређивањем горња два израза добија се

$$\eta_j = \sum_{i=1}^{n}a_{ji}\,\xi_i \tag{7.2}$$

што се матрично може записати у следећем облику

$$\eta = \mathscr{A}\xi\,. \tag{7.3}$$

Дакле, оператор $\hat{A}$ у простору $\mathbb{U}^n(\mathbb{F})$ и оператор (матрица) $\mathscr{A}$ у простору $\mathbb{F}^n$ делују еквивалентно у односу на изоморфизам f, што се може графички представити као на **слици 7.1**.



Слика 7.1.

Очигледно је да су $|v\rangle = f^{-1}(\xi)$, $|\tilde{v}\rangle = \hat{A}\, f^{-1}(\xi)$ и $\eta = f\left(|\tilde{v}\rangle\right) = f\,\hat{A}\, f^{-1}(\xi)$, где производ изоморфизама и оператора представља *композицију пресликавања*. Стога се на основу формуле (7.3) добија

$$\mathscr{A} = f\,\hat{A}\, f^{-1}$$

тј. матрица $\mathscr{A}$ јесте композиција пресликавања. Како је $\mathscr{A} = g(\hat{A})$, биће

$$g(\hat{A}) = f\,\hat{A}\, f^{-1}.$$

Горња трансформација назива се *трансформацијом сличности*.

Q.E.D.

Из претходне теореме се види да је оператор $\hat{A}$ еквивалентан матрици $\mathscr{A}$, не матрици $\mathscr{B}$ која се природно јавља приликом развијања ликова базиса по полазном базису.

7.1. Оператори у Хилбертовом простору

Читав претходни поступак репрезентовања може се уопштити и на бесконачно-димензионални случај, само је у сумама потребно заменити n са ∞, као и водити рачуна о конвергенцији израза који се тако јављају.

Једноставнији начин преласка на бесконачно-димензионалан случај омогућава репрезентовање у унитарном простору уз коришћење ортонормираног базиса (који се у квантној механици најчешће срећу)

$$\langle \mathrm{e}_k | \hat{A} | \mathrm{e}_i \rangle = \left\langle \mathrm{e}_k \,\middle|\, \sum_j a_{ji}\, \mathrm{e}_j \right\rangle = \sum_j a_{ji} \langle \mathrm{e}_k | \mathrm{e}_j \rangle = \sum_j a_{ji}\, \delta_{kj} = a_{ki}$$

илити

$$a_{ki} = \langle \mathrm{e}_k | \hat{A} | \mathrm{e}_i \rangle. \tag{7.4}$$

Формула (7.4) замењује основну формулу репрезентовања (7.1) када су базиси ортонормирани, а лако се уопштава на бесконачно-димензионални случај. При томе се функције које су елементи функционалног Хилбертовог простора могу схватити као непребројиво-бесконачно-димензионалне матрице-колоне, а сума, која се мора јавити у формули (7.4) због скаларног производа, прелази у интеграл.

Сада ће бити наведени примери неких оператора у Хилбертовом простору.

Пример 7.1.1. *Нулти оператор* $\hat{0}$ јесте оператор који сваком елементу $|v\rangle \in \mathbb{H}$ придружује нулти елемент $|0\rangle$

$$\hat{0}|v\rangle = |0\rangle .$$

Овај оператор евидентно јесте линеаран, домен му је читав простор $\mathbb{H}$, а од нултог оператора у КДУП-има разликује се само по домену, тј. области важења.

Пример 7.1.2. *Јединични оператор* $\hat{I}$ у простору $\mathbb{H}$

$$\hat{I}|v\rangle = |v\rangle$$

И овај оператор је линеаран, са $\mathbb{D}(\hat{I}) = \mathbb{H}$, а од јединичног оператора у КДУП-има разликује се само по домену.

Пример 7.1.3. *Оператор сличности* $\hat{A}$

$$\hat{A}|v\rangle = \alpha|v\rangle , \ \alpha \in \mathbb{C} , \ |v\rangle \in \mathbb{H} .$$

Овај оператор такође је линеаран, домен му је цео $\mathbb{H}$.

Пример 7.1.4. *Диференцијални оператор*[3]

$$\hat{A} = -i\hbar \frac{d}{d\varphi}$$

у простору $\mathbb{L}^2[0, 2\pi] \equiv \mathbb{I}^2(\varphi)$

$$-i\hbar \frac{d}{d\varphi}\left[\alpha_1 \phi_1(\varphi) + \alpha_2 \phi_2(\varphi)\right] = -i \left[\alpha_1 \frac{d\phi_1(\varphi)}{d\varphi} + \alpha_2 \frac{d\phi_2(\varphi)}{d\varphi}\right] \tag{7.5}$$

[3] *Редукована Планкова константа* $\hbar = h/2\pi$ јавља се због димензија физичке величине момента импулса, а који се у квантној механици (у координатној репрезентацији) представља диференцијалним оператором.

те је опет реч о линеарном оператору. Домен овог оператора мора садржавати периодичне функције $\phi(0)=\phi(2\pi)$, а како тригонометријске функције $\phi_m(\varphi)$ припадају домену диференцијалног оператора (5.4а), то је $\mathbb{D}(\hat{A})\neq\{|0\rangle\}$. Но, такође је и $\mathbb{D}(\hat{A})\neq\mathbb{L}^2(\varphi)$, јер је нпр. $\sin(\varphi/2)\in\mathbb{L}^2(\varphi)$, пошто је $\|\sin(\varphi/2)\|=\sqrt{\pi}$, али је $\cos 0\neq\cos\pi$, те $\sin(\varphi/2)\notin\mathbb{D}(\hat{A})$. Међутим, пошто скуп тригонометријских функција представља базис простора $\mathbb{L}^2(\varphi)$, домен $\mathbb{D}(\hat{A})$ је свуда густ скуп у простору $\mathbb{L}^2(\varphi)$. Такође је на основу формуле (7.5) очигледно да је $\mathbb{D}(\hat{A})$ линеал.

Пример 7.1.5. *Диференцијални оператор*

$$\hat{B}=-i\hbar\frac{d}{dx}$$

у простору $\mathbb{L}^2(-\infty,\infty)$

$$-i\hbar\frac{d}{dx}\left[\alpha_1 f_1(x)+\alpha_2 f_2(x)\right]=-i\ \left[\alpha_1\frac{df_1(x)}{dx}+\alpha_2\frac{df_2(x)}{dx}\right]$$

те се опет ради о линеарном оператору. Међутим, $\mathbb{D}(\hat{B})\neq\mathbb{L}^2(-\infty,\infty)$ пошто је класа диференцијабилних функција ужа од класе непрекидних. С друге стране је домен $\mathbb{D}(\hat{B})\neq\{|0\rangle\}$ пошто је, на основу резултата **потпоглавља 5.1.1.**

$$\psi_n'(x)=\sqrt{\frac{n\alpha}{2}}\,\psi_{n-1}(x)-\sqrt{\frac{(n+1)\alpha}{2}}\,\psi_{n+1}(x), \tag{7.6}$$

те, како је $\psi_n(x)\in\mathbb{L}^2(-\infty,\infty)$, а према изразу (7.6) је и $\psi_n'(x)\in\mathbb{L}^2(-\infty,\infty)$, следи да је $\psi_n(x)\in\mathbb{D}(\hat{B})$, што опет значи да $\mathbb{D}(\hat{B})$ није празан скуп. Како је било која линеарна комбинација Ермитових функција такође елемент $\mathbb{D}(\hat{B})$, а скуп Ермитових функција јесте свуда густ у $\mathbb{L}^2(-\infty,\infty)$, следи и да је скуп $\mathbb{D}(\hat{B})$ свуда густ у простору $\mathbb{L}^2(-\infty,\infty)$. Што одговара избору целог простора за домен оператора у коначно-димензионалном случају.

Пример 7.1.6. *Мултипликативни оператор* $\hat{X}$ у простору $\mathbb{L}^2(-\infty,\infty)$ дефинише се као оператор за који важи

$$\hat{X} f(x) = x f(x), \quad \forall x \in \mathbb{D}(\hat{X}) = \{\ f(x)\colon\ f(x) \in \mathbb{L}^2(-\infty,\infty),\ x f(x) \in\ {}^2(-\infty,\infty)\}$$

Јасно је је $\mathbb{D}(\hat{X}) \neq \mathbb{L}^2(-\infty,\infty)$ (овако нешто срећe се само у Хилбертовом простору) јер је $\sin x/x \in \mathbb{L}^2(-\infty,\infty)$, пошто је $\|\sin x/x\| = \sqrt{\pi}$; опет, $\sin x \notin \mathbb{L}^2(-\infty,\infty)$ јер $\|\sin x\|$ не постоји, те $\sin x/x \notin \mathbb{D}(\hat{X})$. Међутим, $\mathbb{D}(\hat{X}) \neq \{|0\rangle\}$ будући да Ермитове функције помножене са x дају

$$x\psi_n(x) = \sqrt{\frac{n}{2\alpha}}\,\psi_{n-1}(x) + \sqrt{\frac{n+1}{2\alpha}}\,\psi_{n+1}(x); \tag{7.7}$$

сад, на основу $\psi_n(x) \in \mathbb{L}^2(-\infty,\infty)$ и израза (7.7) следи и да је $x\psi_n(x) \in \mathbb{L}^2(-\infty,\infty)$, те је стога $\psi_n(x) \in \mathbb{D}(\hat{X})$, те домен $\mathbb{D}(\hat{X})$ заиста није празан скуп. С обзиром да свака линеарна комбинација Ермитових функција мора бити елемент $\mathbb{D}(\hat{X})$, као и да је скуп Ермитових функција свуда густ у простору $\mathbb{L}^2(-\infty,\infty)$, следи да је и скуп $\mathbb{D}(\hat{X})$ свуда густ у простору $\mathbb{L}^2(-\infty,\infty)$.

7.2. Непрекидност, ограниченост и затвореност оператора у Хилбертовом простору

Да би за операторе у Хилбертовом простору важила иста правила која важе за операторе у КДУП, они морају задовољавати додатне услове, повезане пре свега са проблемима конвергенције у Хилбертовом простору.

Дефиниција 7.4. Оператор $\hat{A}$ у Хилбертовом простору $\mathbb{H}$ *непрекидан* је у тачки $|v_0\rangle \in \mathbb{D}(\hat{A})$ у смислу метрике генерисане скаларним производом

$$\left\| |v_1\rangle - |v_2\rangle \right\| = \sqrt{\langle v_1 - v_2 | v_1 - v_2 \rangle}\,,$$

ако конвергентном низу елемената $|v_n\rangle \to |v_0\rangle$ придружује конвергентан низ елемената $\hat{A}|v_n\rangle \to \hat{A}|v_0\rangle$, тј. ако из $\left\| |v_n\rangle - |v_0\rangle \right\| < \delta(\varepsilon)$ следи $\left\| \hat{A}|v_n\rangle - \hat{A}|v_0\rangle \right\| < \varepsilon$, или

$$\lim_{n\to\infty} \hat{A}|v_n\rangle = \hat{A} \lim_{n\to\infty} |v_n\rangle\,.$$

Пре увођења преосталих појмова потребних за подвргавање оператора у Хилбертовом простору горе поменутим условима, биће доказана једна занимљива лема.

Лема 7.2. Потребан и довољан услов да оператор $\hat{A}$ буде непрекидан јесте његова непрекидност на нултом елементу.

Доказ.

Нека је $\hat{A}$ линеаран и непрекидан оператор. Пошто је сигурно $|0\rangle \in \mathbb{D}(\hat{A})$, оператор $\hat{A}$ непрекидан је и на нултом елементу. С друге стране, ако је оператор $\hat{A}$ линеаран и непрекидан на нултом елементу, онда за сваки број $\varepsilon > 0$, постоји $\delta(\varepsilon) > 0$ такав да за сваки $|0\rangle \neq |v\rangle \in \mathbb{D}(\hat{A})$ за који важи $\left\| |v\rangle \right\| = \left\| |v\rangle - |0\rangle \right\| < \delta(\varepsilon)$, важи и $\left\| \hat{A}|v\rangle - \hat{A}|0\rangle \right\| = \left\| \hat{A}|v\rangle \right\| < \varepsilon$. Ако се сада у горње изразе уместо $|v\rangle \in \mathbb{D}(\hat{A})$ стави $|v\rangle - |v_0\rangle \in \mathbb{D}(\hat{A})$, онда за $|v\rangle$ из важења $\left\| |v\rangle - |v_0\rangle \right\| < \delta(\varepsilon)$ следи и

$$\left\| \hat{A}\big(|v\rangle - |v_0\rangle\big) \right\| = \left\| \hat{A}|v\rangle - \hat{A}|v_0\rangle \right\| < \varepsilon$$

те стога, због произвољности елемента $|v\rangle$, следи да је $\hat{A}$ непрекидан оператор за сваки $|v_0\rangle$.

Дефиниција 7.5. Оператор $\hat{A}$ у Хилбертовом простору $\mathbb{H}$ је *ограничен* ако постоји скалар $M > 0$ такав да је

$$\left\| \hat{A}|v\rangle \right\| \leq M \left\| |v\rangle \right\|, \quad \forall |v\rangle \in \mathbb{D}(\hat{A}) . \tag{7.8}$$

Инфимум свих бројева M за које важи формула (7.8) зове се *норма оператора* и означава се са $\left\| \hat{A} \right\|$, те израз (7.8) постаје

$$\left\| \hat{A}|v\rangle \right\| \leq \left\| \hat{A} \right\| \left\| |v\rangle \right\|, \quad \forall |v\rangle \in \mathbb{D}(\hat{A}) , \tag{7.9}$$

односно сама норма оператора $\hat{A}$ може бити одређена и формулом

$$\left\| \hat{A} \right\| = \sup_{\left\| |v\rangle \right\| = 1} \left\| \hat{A}|v\rangle \right\| .$$

Теорема 7.2. Ограничени оператор ограниченом скупу елемената придружује такође ограничен скуп.

Доказ.

Одмах следи из формуле (7.9) јер, ако је $|v\rangle$ из ограниченог скупа, мора бити $\left\| |v\rangle \right\| < \gamma$, где је γ одговарајући позитиван број. Тада је $\left\| \hat{A}|v\rangle \right\| \leq \gamma \left\| \hat{A} \right\|$, а то значи да је скуп $\left\{ \hat{A}|v\rangle \right\}$ ограничен.

Q.E.D.

Важи и обрнуто (без доказа): Сваки оператор који ограниченом скупу придружује ограничен скуп је ограничен.

Теорема 7.3. Оператор је непрекидан онда и само онда када је ограничен.

Доказ.

Нека је $\hat{A}$ ограничен оператор и $|v_n\rangle \to |v_0\rangle$, ма који конвергентан низ елемената у Хилбертовом простору $\mathbb{H}$, а који уједно припада и $\mathbb{D}(\hat{A})$. Тада важи

$$\left\|\hat{A}|v_n\rangle-\hat{A}|v_0\rangle\right\|=\left\|\hat{A}\left(|v_n\rangle-|v_0\rangle\right)\right\|\le\left\|\hat{A}\right\|\left\||v_n\rangle-|v_0\rangle\right\|.$$

Но, како $\left\||v_n\rangle-|v_0\rangle\right\|\to 0$ и $\left\|\hat{A}|v_n\rangle-\hat{A}|v_0\rangle\right\|\to 0$, што значи да и низ $\hat{A}|v_n\rangle$ конвергира те је оператор $\hat{A}$ непрекидан.

С друге стране, ако се претпостави да оператор $\hat{A}$ није ограничен, он неће бити ограничен ни на јединичној сфери у простору $\mathbb{H}$ (јединична сфера је скуп свих елемената за које важи $\left\||v\rangle\right\|=1$), што значи да ће на тој сфери постојати неки низ елемената $|v_n\rangle\in\mathbb{H}$, таквих да је $\left\||v_n\rangle\right\|=1$ и да важи $\left\|\hat{A}|v_n\rangle\right\|\ge\delta\to\infty$. Но, тада низ елемената $|v_n\rangle/\delta$ тежи нултом елементу $|0\rangle$, док $\left\|\hat{A}|v_n\rangle/\delta\right\|$ остаје већи од јединице за свако n. Значи да оператор није непрекидан за $|v\rangle=|0\rangle$, а то, на основу **леме 7.2.** значи да није непрекидан уопште.

Q.E.D.

Пример 7.3.1. Оператор сличности је на основу следећег разматрања

$$\left\|\hat{A}\right\|=\sup_{\||v\rangle\|=1}\left\|\hat{A}|v\rangle\right\|=\sup_{\||v\rangle\|=1}\left\|\alpha|v\rangle\right\|=\sup_{\||v\rangle\|=1}|\alpha|\left\||v\rangle\right\|=|\alpha|$$

ограничен, значи и непрекидан.

Пример 7.3.2. За диференцијални оператор $-i\hbar\, d/dx$ у простору $\mathbb{L}_2(-\infty,\infty)$ важи, према формули (7.6)

$$\left\|\left(-i\hbar\frac{d}{dx}\right)\psi_n(x)\right\|^2=\left(n+\frac{1}{2}\right)\ {}^2\alpha\ . \qquad (7.10)$$

Види се да је диференцијални оператор неограничен, пошто се његова норма (7.10) може учинити произвољно великом, будући да важи за било које n; стога је он, према **теореми 7.3**, прекидан. Како се ради о оператору од фундаменталног значаја за квантну механику, да би се уопште могло радити с њим мора се *услов непрекидности*, потребан да би се при раду са оператором могла замењивати места граничног процеса и оператора (гранични процеси јављају се и приликом сумирања, и приликом диференцирања, и приликом интеграљења!) »олабавити« и користити се тиме да је изводни оператор затворен.

Дефиниција 7.6. Оператор $\hat{A}$ у Хилбертовом простору $\mathbb{H}$ назива се *затвореним* ако из $|v_n\rangle \in \mathbb{D}(\hat{A})$, $|v\rangle = \lim_{n\to\infty}|v_n\rangle$ и $|\tilde{v}\rangle = \lim_{n\to\infty}\hat{A}|v_n\rangle$ следи да је $|v\rangle \in \mathbb{D}(\hat{A})$ и $|\tilde{v}\rangle = \hat{A}|v\rangle$.

За разлику од непрекидних оператора, код затворених оператора из конвергенције низа $|v_n\rangle \in \mathbb{D}(\hat{A})$ не следи аутоматски и конвергенција ликова $\hat{A}|v_n\rangle$. Међутим, ако постоји неки конвергентан низ $|v_n\rangle$ за који и низ $\hat{A}|v_n\rangle$ конвергира онда и за затворене операторе важи

$$\lim_{n\to\infty}\hat{A}|v_n\rangle = \hat{A}\lim_{n\to\infty}|v_n\rangle .$$

За доказ да је диференцијални оператор затворен видети Роглића [8].

Пример 7.3.3. За мултипликативни оператор $\hat{X}$, на основу формуле (7.7), је

$$\left\| \hat{X}\,\psi_n(x) \right\|^2 = \frac{1}{\alpha}\left(n + \frac{1}{2} \right)$$

те он није ограничен, а самим тим није ни непрекидан. Али је, баш као и диференцијални, затворен, те је могуће користити га у квантној механици. За доказ затворености мултипликативног оператора видети Роглића [8].

Пример 7.3.4. Диференцијални оператор $-i\hbar\, d/d\varphi$ у простору $\mathbb{L}_2(\varphi)$ када делује на функцију тригонометријског система $\phi_m(\varphi)$ даје исту ту функцију помножену са $m\hbar$, те је норма одговарајућег вектора

$$\left\| \hat{A}\phi_m(\varphi) \right\|^2 = m^2\hbar^2 .$$

Ово значи да је оператор $\hat{A}$ неограничен, те је самим тим и прекидан (јер m може бити учињено произвољно великим). О третману оваквих оператора видети у претходна два примера (наиме, и он је затворен, итд.)